E.N.S.E.T. Section A3 (programme C) 1983

Toutes les fonctions considérées dans le problème sont à valeurs réelles et définies sur $\mathbb{R}^+$, f désigne une fonction continue, à dérivée continue sur $[0, +\infty[$, g désigne une fonction continue sur $[0, +\infty[$, G est la primitive de g définie par $G(t) = \int_0^t g(u)\,du$.

On propose d'étudier des conditions dans lesquelles les deux intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,dt \quad \text{et la série} \quad \sum_0^{\infty} f(k)\,g(k)$$

sont de même nature.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

(I) On suppose dans cette partie :

a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

b. $\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) \geqslant 0$ et g est décroissante.

1° Montrer que, si $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente, alors la série $\sum_0^{\infty} f(k)\,g(k)$ et les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,dt$$

sont toutes trois convergentes.

2° Montrer que si $l \neq 0$ et si $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est divergente, alors $\sum_0^{\infty} f(k)\,g(k)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$

sont également divergentes.

3° Montrer, sur un exemple simple, que sous les hypothèses de la question précédente avec f non constante, $\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,dt$ peut être convergente.

4° On suppose $l = 0$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ divergente. En particulier on se place dans le cas où

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{(t+1)^{\beta}} \quad (\beta \leqslant 1)$$

Étudier les natures de $\sum f(k)\,g(k)$, $\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$, $\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,dt$.

(II) Dans cette partie, f et g sont supposées à valeurs positives, f décroissante dans $[0, +\infty[$ avec $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

On considère la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ au moyen de :

$$\forall\, k \text{ entier} \geqslant 1 \quad \begin{cases} u_k(t) = 0 & \text{si} \quad t < k \\ u_k(t) = g(k) & \text{si} \quad t \geqslant k \end{cases}$$

On définit les fonctions « sommes partielles » S_n par $S_n(t) = \sum_{k=1}^{k=n} u_k(t) \quad (n \geqslant 1)$

. . . / . . .

1° En explicitant la définition de $S_n(t)$ suivant la valeur attribuée au réel t, montrer que la série de terme général $u_k(t)$ est convergente pour tout réel $t \geqslant 0$. Définir la somme $S(t)$ de cette série.

2° *a.* On suppose $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \left[\sum_{k=0}^{k=n} k^\alpha \right] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha = \frac{1}{\alpha + 1}$$

En déduire que, si $[t]$ désigne la partie entière de t, on a :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{k=[t]} k^\alpha = \frac{1}{\alpha + 1}$$

b. Déduire de ce qui précède un équivalent de $S(t)$ lorsque $g(t) = t^\alpha \quad (\alpha > 0)$.

c. On suppose plus généralement g positive et croissante sur $[0, +\infty[$ et telle que la primitive G de g vérifie :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = 1$$

Trouver un équivalent de $S(t)$ lorsque t tend vers l'infini (s'exprimant simplement à l'aide de G).

d. Montrer, sur un exemple simple, qu'il existe des fonctions g positives croissantes, qui ne vérifient pas :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = 1$$

3° *a.* Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u_k(t)\, f'(t)\, dt$ est convergente; calculer sa valeur.

b. En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^{+\infty} S_n(t)\, f'(t)\, dt$.

c. Montrer que, pour tout entier n supérieur à zéro, on a :

$$\left| \int_0^{n+1} S(t)\, f'(t)\, dt \right| = -\int_0^{n+1} S(t)\, f'(t)\, dt \leqslant -\int_0^{+\infty} S_n(t)\, f'(t)\, dt$$

En déduire que si la série $\sum_0^\infty f(k)\, g(k)$ est convergente alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t) f'(t)\, dt$ est convergente.

d. Montrer la réciproque de cette dernière propriété (on pourra utiliser l'inégalité : $S_n(t) \leqslant S(t)$).

4° *a.* On suppose $g(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$ donné).

Montrer que la série $\sum_0^\infty f(k)\, g(k)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\, dt$ sont de même nature.

b. On suppose g croissante et telle que $\lim_{n \to \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = 1$.

Montrer que $\sum_0^\infty f(k) g(k)$ et $\int_0^{+\infty} G(t)\, f'(t)\, dt$ sont de même nature.

. . . / . . .

(II) On suppose toujours f continûment dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. La fonction g est définie par $g(t) = t^\alpha$ ($\alpha > -1$ donné).

1° On suppose l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} |f'(t)|\, dt$ convergente.

a. Montrer :

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad |x^{\alpha+1} f(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} t^{\alpha+1} |f'(t)|\, dt$$

(On pourra commencer par minorer, pour $y > x$, l'intégrale : $\int_x^y |f'(u)|\, u^{\alpha+1}\, du$.)

b. Déduire de ce qui précède que $\lim_{x \to \infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0$ et montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\, dt$ est convergente.

c. Montrer, à l'aide d'un exemple, que ce dernier résultat peut être faux pour $\alpha = -1$.

2° On suppose toujours que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} |f'(t)|\, dt$ est convergente et on pose $h(x) = \int_x^{+\infty} |f'(t)|\, dt$.

Montrer que h est une fonction continue, dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $|f(x)| \leqslant h(x)$. Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} t^\alpha h(t)\, dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|\, dt$. (On pourra appliquer à la fonction h les résultats de la question précédente III. 1°).

3° On suppose seulement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha |f'(t)|\, dt$ avec $\alpha > 0$.

a. Montrer que, quel que soit l'entier p :

$$|f(p) - \int_p^{p+1} f(t)\, dt| \leqslant \int_p^{p+1} |f'(u)|\, du$$

b. En déduire la convergence absolue de la série de terme général v_p où :

$$v_p = p^\alpha \left[f(p) - \int_p^{p+1} f(t)\, dt \right]$$

c. Montrer que si $\int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|\, dt$ est convergente, alors la série $\sum_0^\infty p^\alpha |f(p)|$ est également convergente. Que peut-on en déduire pour cette intégrale et cette série dans l'hypothèse où $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} |f'(t)\, dt$ est convergente (avec $\alpha > -1$)?

d. Montrer que si f est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\, dt$ et la série $\sum_0^\infty p^\alpha f(p)$ sont de même nature.

FIN